Ein Beitrag zur Theorie der Centralbewegungen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Richard Frantz
aus Magdeburg.

Rostock 1889.

Ref. Prof. Dr. O. Staude.

Die Probleme der Centralbewegung haben seit Newton fortgesetzte Beachtung bei den theoretischen Mechanikern gefunden. Schon vor ihm war es Kepler[1]) gelungen, durch vergleichende Beobachtung an den Bewegungen der Himmelskörper die bekannten Gesetze aufzufinden, nach denen man im Alterthum vergeblich geforscht hatte. Doch war es Newton[2]) vorbehalten, den innern Zusammenhang dieser Gesetze auf mathematischem Wege zur Erkenntniss zu bringen. Das umgekehrte Problem aber, nämlich aus dem Gesetze der anziehenden Kraft die Bahn zu finden, war auch Newton noch nicht im Stande, in allen in Betracht kommenden Fällen allgemein zu lösen. Der erste, welchem dies gelang, war Johann Bernoulli[3]). Später haben Euler[4]) und Kästner[5]) mit Hülfe der inzwischen weiter ausgebildeten Methode der Integralrechnung einfachere und wohl befriedigende Lösungen gegeben.

Nachdem dieses Problem gelöst war, wurden vielfach Untersuchungen über Centralbewegungen nach anderen Gesetzen angestellt, welche weniger wegen ihrer analytischen als vielmehr geometrischen Erfolge von Interesse sind. Hierher gehören die Untersuchungen der ebenen Centralbewegungen nach den Gesetzen $\frac{\mu}{r^n}$ (für $n = 3, 4, 5, 6, 7$) von Stader[6]),

---

[1]) Astron. nova. Prag 1609.

[2]) Principia philos. natur. mathem. London 1687.

[3]) Mém. de l'Academ. roy. des Sc. de Paris 1710 und Opp. To. I. pag. 469.

[4]) Mechan. Petrop. 1736 To. I. L. V. prop. 80.

[5]) Höhere Mechanik § 202—240.

[6]) Crelle's Journal Bd. 46.

und als Ergänzung hierzu haben Schmidt[1]) und Wahle[2]) in ihren Dissertationen Beiträge geliefert. Auch Kärger[3]) und Legoux[4]) betrachten diese Bewegungen. Die Untersuchungen gelangen mit Hülfe der elliptischen Funktionen.

Die nachfolgende Arbeit behandelt ebenfalls eine Centralbewegung für jedes beliebige positive n mit Ausschluss von $n = 0$ und $= 1$. Diese ist jedoch keine freie Bewegung, wie die eben erwähnten, weil der angezogene Punkt gezwungen ist, auf einer Graden zu bleiben.

Arbeiten über die Bewegung eines Punktes, wie die von Viehoff[5]), am Ende[6]) und Vollhering[7]), möchte ich hier wegen der wenn auch nur weiteren Beziehung, welche sie zu meiner Abhandlung haben, nicht unerwähnt lassen.

Die Darstellung der Bewegung in nachfolgendem Problem benutzte eine Untersuchung des Herrn Staude[8]).

Die Resultate, welche Herr Staude gewonnen hat, bleiben nämlich bestehen, wenn statt der Schwerkraft eine Centralkraft gesetzt wird, welche zum vorhandenen System symmetrisch liegt. Die Lösung des vorgeworfenen Problems weicht nun insofern von der des Herrn Staude ab, als nicht die Rotationsfläche III. Ordnung, welche Herr Staude (h, k) nennt, sich ergiebt, sondern eine andere Rotationsfläche, welche aber in ihren Eigenschaften in Beziehung auf das Problem mit denen obiger vollständig übereinstimmt.

---

[1]) Ueber ein Attraktionsproblem. Halle 1883.

[2]) Die Centralbewegung eines materiellen Punktes nach dem Gesetze $\mu r - 5$. Ebenda.

[3]) Untersuchung über die Bahn eines Punktes etc. Grunerts Archiv Bd. 58.

[4]) Sur les trajectoires d'un point etc. Nouvelles Annales, 2 Se. Bd. 19.

[5]) Ueber ein mechan. Problem Joh. Bernoulli's. Düsseld. Progr. 1868.

[6]) Ueber die Bewegung eines mat. Punktes etc. Grunerts Archiv Bd 49. Die Centralkraft und ein Problem aus der höh. Mechanik. Sprottauer Progr. 1868.

[7]) Betrachtung eines der Schwere unterworfenen Punktes. Dissert. Jena 1868.

[8]) Ueber eine Gattung doppelt reell periodischer Funktionen zweier Veränderlicher. Mathem. Annalen Bd. 29, S. 468. Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche. Acta mathematica 1888.

Das Problem lautet:

Eine Grade dreht sich um eine feste Axe, die mit ihr nicht in derselben Ebene liegt mit konstanter Rotationsgeschwindigkeit. Es ist die Bewegung eines materiellen Punktes auf der Graden zu untersuchen, welcher einer anziehenden Centralkraft unterworfen ist.

§ 1. Allgemeine Lösung.

Da die rotirende Grade mit der festen Axe, welche wir zur Z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems nehmen wollen, nicht in derselben Ebene liegt, so können wir stets beide grade Linien durch eine gemeinschaftliche Senkrechte verbinden. Diese Senkrechte hat für alle Lagen der beweglichen Graden einen konstanten Werth, er sei a. Der Fusspunkt der Senkrechten auf der Axe sei der Coordinatenanfang. In ihm liege die anziehende Centralkraft. Den anderen Endpunkt der Senkrechten a wollen wir im Verlaufe dieser Abhandlung den relativen Anfangspunkt nennen. Die Y-Axe möge so liegen, dass zur Zeit $t = o$ die gemeinschaftliche Senkrechte a mit ihr zusammenfalle. Die X-Axe endlich liege so, dass die Drehung der Graden aus der Y-Axe nach der X-Axe im positiven Sinne erfolge. Der Winkel, den a mit der Y-Axe bildet, möge ϑ sein, der, welchen die rotirende Grade mit der XY-Ebene bildet, soll β genannt werden. Letzterer bleibt bei der Bewegung konstant. (Vergl. Taf. I.).

Die Coordinaten des beweglichen Punktes sind hiernach

$$x = a \sin \vartheta + z \operatorname{cotg} \beta \cos \vartheta$$
$$y = a \cos \vartheta - z \operatorname{cotg} \beta \sin \vartheta$$
$$z = z$$

ϑ und z sind wie ersichtlich independent. Setzen wir noch $z = q \sin \beta$ so lauten die Coordinaten

$$x = a \sin \vartheta + q \cos \beta \cos \vartheta$$
$$y = a \cos \vartheta - q \cos \beta \sin \vartheta$$
$$z = q \sin \beta.$$

In der II. Lagrange'schen Differentialgleichung

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

haben wir zunächst die lebendige Kraft T zu bestimmen. Es ist

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}.$$

Hierin ist, wenn die konstante Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ gesetzt wird,

$$\frac{dx}{dt} = a\cos\vartheta\,\omega + \frac{dq}{dt}\cos\beta\cos\vartheta - q\cos\beta\sin\vartheta\,\omega$$

$$\frac{dy}{dt} = -a\sin\vartheta\,\omega - \frac{dq}{dt}\cos\beta\sin\vartheta - q\cos\beta\cos\vartheta\,\omega$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dq}{dt}\sin\beta$$

und

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = a^2\omega^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + q^2\cos^2\beta\,\omega^2 + 2a\,\omega\cos\beta\,\frac{dq}{dt}.$$

Es ist daher

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{a^2\omega^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + q^2\cos^2\beta\,\omega^2 + 2a\,\omega\cos\beta\,\frac{dq}{dt}\right\}.$$

Wir setzen hierin $\frac{dq}{dt} = q'$, so ist

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{a^2\omega^2 + q'^2 + q^2\cos^2\beta\,\omega^2 + 2a\,\omega\cos\beta\,q'\right\}$$

und bilden

$$\frac{\partial T}{\partial q'} = q' + 2a\,\omega\cos\beta$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = q\cos^2\beta\,\omega^2.$$

Dann lautet die Differentialgleichung

$$\frac{d^2q}{dt^2} - q\cos^2\beta\,\omega^2 = Q.$$

Setzen wir $q \cos^2 \beta \, \omega^2 + Q = P$, so entsteht

$$\frac{d^2q}{dt^2} = P, \text{ oder}$$

$$q' \frac{dq'}{dq} = P$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{dq'^2}{dq} = P, \text{ daher}$$

$$q' = \sqrt{2 \int P \, dq + c_1}$$

und hieraus

$$dt = \frac{dq}{\sqrt{2 \int P \, dq + c_1}}$$

$$t = \int \frac{dq}{\sqrt{2 \int P \, dq + c_1}}.$$

Der Werth $\int P \, dq$ hängt ab von der Grösse Q, diese aber von der angenommenen Centralkraft. Wir setzen daher fest, dass die anziehende Kraft der n ten Potenz der Entfernung r des beweglichen Punktes vom Anfangspunkte 1) direct, 2) indirect proportional sei. Die Kraft selbst ist also 1) $\mu \, r^n$ und 2) $\mu \, r^{-n}$, worin μ die in der Einheit der Entfernung wirkende Kraft ist. Berücksichtigen wir, dass $r^2 = q^2 + a^2$ ist, so folgt

$$1) \quad Q = - \mu \, q \, (\sqrt{q^2 + a^2})^{n-1}$$

$$2) \quad Q = - \frac{\mu \, q}{(\sqrt{q^2 + a^2})^{n+1}}$$

Wir erhalten nun

$$1) \quad 2 \int P \, dq = q^2 \omega^2 \cos^2 \beta - \frac{2 \mu}{n+1} (\sqrt{q^2 + a^2})^{n+1}$$

$$2) \quad 2 \int P \, dq = q^2 \omega^2 \cos^2 \beta + \frac{2 \mu}{n-1} (\sqrt{q^2 + a^2})^{1-n}$$

Es ergiebt sich also

$$t = \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{q^2 \omega^2 \cos^2 \beta - \frac{2 \mu}{n+1} (q^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} + c_1}}$$

und $$t = \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{q^2 \omega^2 \cos^2 \beta + \frac{2\mu}{n-1} (q^2 + a^2)^{\frac{1-n}{2}} + c_2}}.$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Punktes $\frac{d\varphi}{dt}$, wo φ der Winkel zwischen der Meridianebene des beschriebenen Rotationshyperboloids und der YZ-Ebene ist, so ist zunächst

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varrho \,.\, \omega = \sqrt{a^2 + q^2 \cos^2 \beta} \,.\, \omega.$$

Die doppelt gestrichene Wurzel gilt als positiv. Dann ist

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{\omega \sqrt{a^2 + q^2 \cos^2 \beta}}{\sqrt{F_{\pm n}(q)}}.$$

Hierin ist

$$F_{+n}(q) = q^2 \omega^2 \cos^2 \beta - \frac{2\mu}{n+1} (q^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} + c_1$$

$$F_{-n}(q) = q^2 \omega^2 \cos^2 \beta + \frac{2\mu}{n-1} (q^2 + a^2)^{\frac{1-n}{2}} + c_2.$$

Setzen wir $v = \sin^2 \varphi$, also $d\varphi = \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}}$, so sind die Beziehungen zwischen q, φ, t gegeben durch

$$\text{(A.)} \quad \begin{cases} x = \psi(q) \cos \varphi, \; y = \psi(q) \sin \varphi, \; z = q \sin \beta \\ \psi(q) = \sqrt{a^2 + q^2 \cos^2 \beta} \end{cases}$$

und

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} -\int_0^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} + \int_{q_0}^{q} \frac{\omega \psi(q)\, dq}{\sqrt{F_{\pm n}(q)}} = 0 \\ \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{F_{\pm n}(q)}} = t. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben die Form des allgemeinen Umkehrproblems des Herrn Staude. Es ist nur zu untersuchen, ob die an die Umkehrung geknüpften Bedingungen hier zutreffen.

§ 2. Die Bedingungen des Umkehrproblems und die Wendekreise der Bewegung.

Vergleichen wir die hier gefundenen Ausdrücke § 1 (I) mit denen des Umkehrproblems [1]), so ergiebt sich

I.

$$g_{11} = -\tfrac{1}{2} \qquad g_{21} = 0$$
$$F_{11} = \nu\,(1-\nu) \qquad F_{21} = F_{11}$$
$$g_{12} = \omega\sqrt{a^2 + q^2\cos^2\beta} \qquad g_{22} = 1$$
$$F_{12} = F_{+n}(q) \qquad F_{22} = F_{12}$$

II.

$$g_{11} = -\tfrac{1}{2} \qquad g_{21} = 0$$
$$F_{11} = \nu\,(1-\nu) \qquad F_{21} = F_{11}$$
$$g_{12} = \omega\sqrt{a^2 + q^2\cos^2\beta} \qquad g_{22} = 1$$
$$F_{12} = F_{-n}(q) \qquad F_{22} = F_{12}.$$

Das Intervall, welches Herr Staude von A bis B nimmt, ist hier von $-\infty$ bis $+\infty$. Innerhalb dieses Intervalles ist g_{12} und g_{22} eindeutig und stetig, positiv und von o und ∞ verschieden.

Desgleichen sind die Funktionen $F_{+n}(q)$ stetig, sie haben, wie aus dem Folgenden zu sehen ist, unter gewissen später genannten Bedingungen die Form

$$F_{+n}(q) = (q - q_1)(q_2 - q)\, f_{\pm n}(q),$$

worin

$$A < q_1 < q_2 < B.$$

Demnach bedarf es nur der Untersuchung, welche Bedingungen bestehen müssen, wenn $f_{\pm n}(q)$ für $q_1 \leq q \leq q_2$ positiv und von Null verschieden sein soll. Es erfüllen dann die Gleichungen § 1 (A), (I) alle Bedingungen für das Umkehrproblem.

Wir denken uns zunächst die Funktionen $F_{\pm n}(q) = w$ als Curven in der qw-Ebene. Zur Discussion derselben müssen die reellen Maxima und Minima aufgestellt werden.

---

[1]) Acta mathematica 1888 S. 306. Die später folgenden Citate aus dieser Abhandlung werden kurz durch A. m. angegeben.

Wir betrachten zuerst $F_{+n}(q) = w$. Es ist

$$w = q^2 \omega^2 \cos^2\beta - \frac{2\mu}{n+1}(q^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} + c_1$$

$$\frac{dw}{dq} = 2q\left(\omega^2 \cos^2\beta - \mu (q^2 + a^2)^{\frac{n-1}{2}}\right)$$

Für $\frac{dw}{dq} = o$ folgt

$$q = o \text{ und } (q^2 + a^2)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{\omega^2 \cos^2\beta}{\mu}$$

$$\text{d. i. } q = \pm \sqrt{\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\frac{\omega^2 \cos^2\beta}{\mu}} - a^2} = \pm \nu.$$

Die Bedingung der Reellität von q ist hiernach

$$(1) \quad \omega^2 \cos^2\beta > \mu a^{n-1}.$$

Nach einigen Reduktionen erhalten wir aus obigem

$$\frac{d^2w}{dq^2} = 2\omega^2 \cos^2\beta - 2\mu (q^2 + a^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{nq^2 + a^2}{q^2 + a^2}$$

Für $q = o$ ist

$$\frac{d^2w}{dq^2} = 2(\omega^2 \cos^2\beta - \mu a^{n-1}).$$

Dieser Ausdruck ist nach (1) positiv. Es hat daher die Curve für $q = o$ ein Minimum Für $q = \pm \nu$ ist

$$\frac{d^2w}{dq^2} = \frac{2\omega^2 \cos^2\beta}{\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\frac{\omega^2 \cos^2\beta}{\mu}}} (1 - n)\left(\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\frac{\omega^2 \cos^2\beta}{\mu}} - a^2\right).$$

$1 - n$ ist negativ für $n > 1$, der erste und letzte Faktor aber positiv. Schliessen wir also den Fall $n \leqq 1$ aus, so ist $\frac{d^2w}{dq^2}$ negativ. Es hat daher die Curve für $q = \pm \nu$ zwei Maxima. Beachten wir ferner, dass w stetig und für $q = \pm \infty$ negativ ist, so hat die Curve die Gestalt Taf. II, Fig. I.

Es giebt daher wenigstens zwei Schnittpunkte mit der q-Axe, so lange w positiv ist für $q = o$. Denken wir aber

die Curve in der Richtung der negativen w verschoben, so tritt zu diesen zwei Schnittpunkten noch ein Berührungspunkt ($w = o$, $q = o$); bei weiterer Verschiebung sind vier Schnittpunkte und endlich nur zwei Berührungspunkte vorhanden. Da die Curve symmetrisch zur w-Axe liegt, so sind auch die Schnitt- resp. Berührungspunkte gleichweit vom Nullpunkte entfernt. Die Schnitt- und Berührungspunkte sind nun die Nullwerthe der Funktion w. Je nach der Lage der Curve seien diese Nullwerthe

a) zwei Schnittpunkte: $q = \pm \lambda_1$,

b) zwei Schnittpunkte $q = \pm \lambda_2$, ein Berührungspunkt $q = o$,

c) vier Schnittpunkte $q = \pm \lambda_3$, $q = \pm \lambda_4$; $\lambda_3 > \lambda_4$,

d) zwei Berührungspunkte $q = \pm \nu$. Siehe Taf. II. Fig. a—d.

Hierin ist $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ und $\lambda_3 > \nu > \lambda_4$.

Zur näheren Bestimmung dieser einzelnen Fälle müssen wir die Constante c bestimmen.

Für $t = o$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit des Problems setzen: $\varphi_0 = o$, $v_0 = o$, $q_0 = \lambda$, wo λ ein Nullwerth von w ist. Es ist dann für $t = o$

$$\frac{dq}{dt} = o = \pm \sqrt{\lambda^2 \omega^2 \cos^2 \beta - \frac{2\mu}{n+1} (\lambda^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} + c_1},$$

daher

$$(2)\quad c_1 = \frac{2\mu}{n+1} (\lambda^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} - \lambda^2 \omega^2 \cos^2 \beta.$$

Es ist ersichtlich, dass c_1

positiv, wenn $\frac{2\mu}{n+1} (\lambda^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} > \lambda^2 \omega^2 \cos^2 \beta$,

negativ, wenn $\frac{2\mu}{n+1} (\lambda^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} < \lambda^2 \omega^2 \cos^2 \beta$.

Setzen wir nun $q = o$ in $F_{+n}(q) = w$, so wird

$$w = -\frac{2\mu}{n+1} a^{n+1} + c_1.$$

Die oben genannten vier Fälle a) bis d) ergeben sich nun folgendermassen:

$$
(3)\quad \begin{cases} \text{a) wenn } c_1 \text{ positiv und } > \dfrac{2\mu}{n+1}\, a^{n+1}; \\ \\ \text{b) wenn } c_1 \text{ positiv und } = \dfrac{2\mu}{n+1}\, a^{n+1}; \\ \\ \text{c) wenn} \\ \dfrac{2\mu}{n+1}\, a^{n+1} > c_1 > \dfrac{2\mu}{n+1}(\nu^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} - \nu^2\omega^2\cos^2\beta; \\ \text{dann ist stets } \lambda > \nu;\ \lambda = \lambda_3; \\ \\ \text{d) wenn} \\ c_1 = \dfrac{2\mu}{n+1}(\nu^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} - \nu^2\omega^2\cos^2\beta; \\ \text{dann ist } \lambda = \nu. \end{cases}
$$

Die genannten Werthe sind absolut zu nehmen.

Wir ersehen hieraus die Intervalle, in denen der materielle Punkt sich bewegen kann; wir erkennen ferner, dass die Funktion w in dem Zwischenraum zwischen der Axe q und der Curve, soweit dieselbe nach der Seite der positiven w liegt, stets einen positiven Werth besitzt. Wir wollen der Kürze wegen dieses Gebiet ε nennen, wobei ε auch aus mehreren getrennt liegenden Stücken bestehen kann. Bezeichnen wir dann die Nullwerthe der Funktion als Grenzen dieser Gebiete, so lässt sich die geometrische Anschauung leicht auf den Raum übertragen. Bei der Rotation beschreibt die Grade (q) ein einschaliges Rotationshyperboloid, und nehmen wir die Verlängerung von a als positive w-Axe, so rotirt die eben betrachtete Funktionscurve und das Gebiet ε ebenfalls um die Z-Axe, ohne dass die Axen in der qw-Ebene sich verschieben. Auf diese Weise erhalten wir einen Rotationskörper, der aber nur soweit in Betracht gezogen wird, als er von ε beschrieben wird. Die Rotationsoberfläche dieses Körpers schneidet das Rotationshyperboloid in Kreisen, den Grenzkreisen der Bewegung. Die Gleichung dieser Rotationsfläche (w, q) ist

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{cotg}^2\beta + (w + a)^2,$$

worin $w = F_{+n}(q)$ gesetzt ist.

Für einen Parallelkreis des Rotationshyperboloids ist demnach

$$F_{+n}(q) > 0, = 0, < 0$$

je nachdem derselbe in dem Gebiet ε, in der Grenze desselben, oder ausserhalb dieses Gebiets liegt [1]).

Die Werthe q_1, q_2 der im Anfange dieses Paragraphen erwähnten Form der Funktion $F_{+n}(q)$ sind aus den Fällen a) bis d) zu entnehmen. Innerhalb der dort genannten Grenzen sind alle Bedingungen für das Umkehrproblem erfüllt.

Eine analoge Betrachtung der Funktion $F_{-n}(q)$ giebt entsprechende Resultate. Auch hier ist der Fall $n = 1$ auszuschliessen, schon deshalb, weil dann keine Kräftefunktion existirt.

Es ist

$$w = F_{-n}(q) = q^2 \omega^2 \cos^2\beta + \frac{2\mu}{n-1}(q^2+a^2)^{\frac{1-n}{2}} + c_2$$

$$\frac{dw}{dq} = 2q\left(\omega^2\cos^2\beta - \mu(q^2+a^2)^{-\frac{n+1}{2}}\right)$$

Aus $\frac{dw}{dq} = 0$ folgt

$$q = 0;\ (q^2+a^2)^{-\frac{n+1}{2}} = \frac{\omega^2\cos^2\beta}{\mu}$$

oder $$q = \pm\sqrt{\sqrt[\frac{n+1}{2}]{\frac{\mu}{\omega^2\cos^2\beta}} - a^2} = \pm\nu_1 .$$

Hiernach ist q reell, wenn

$$(4)\quad \mu > a^{n+1}\cdot\omega^2\cos^2\beta.$$

Ferner ist

$$\frac{d^2w}{dq^2} = 2\omega^2\cos^2\beta + 4\mu q^2\frac{n+1}{2}(q^2+a^2)^{-\frac{n+3}{2}} - 2\mu\cdot(q^2+a^2)^{-\frac{n+1}{2}}$$

---

[1]) Vergl. A. m. S. 317.

Für q = o ergiebt sich

$$\frac{d^2w}{dq^2} = \frac{2}{a^{n+1}} (a^{n+1} . \omega^2 \cos^2 \beta - \mu).$$

Dieser Ausdruck ist nach (4) negativ. Die Curve hat daher an dieser Stelle ein Maximum. Setzen wir $q = \pm \nu_1$, so ist

$$\frac{d^2w}{dq^2} = 2 (n + 1) \omega^2 \cos^2 \beta \frac{\nu_1^2}{\nu_1^2 + a^2}$$

eine für jedes n positive Grösse. Die Curve hat daher für $q = \pm \nu_1$ zwei Minima. Da nun $w = F_{-n}(q)$ stetig und für $q = \pm \infty$ positiv ist, so ergiebt sich als Curve Taf. II, Fig. II.

Zur Bestimmung von c_2 möge wie vorher $\varphi_0 = o$, $v_0 = o$, $q_0 = \iota$ sein, worin ι irgend ein erreichbarer endlicher Werth von q ist. Es folgt für t = o

$$\frac{dq}{dt} = o = \sqrt{\iota^2 \omega^2 \cos^2 \beta + \frac{2\mu}{n-1} (\iota^2 + a^2)^{\frac{1-n}{2}} + c_2}$$

$$c_2 = -\left(\iota^2 \omega^2 \cos^2 \beta + \frac{2\mu}{n-1} (\iota^2 + a^2)^{\frac{1-n}{2}}\right)$$

d. h. c^2 ist in allen Fällen ein negativer Werth. Setzen wir q = o in $F_{-n}(q)$, so ist

$$w = \frac{2\mu}{n-1} a^{1-n} + c_2$$

Da nun der absolute Werth von c_2 grösser ist als $\frac{2\mu}{n-1} a^{1-n}$, so ist dieser Werth von w stets negativ. Die Curve schneidet daher die w-Axe auf der negativen Seite. Demnach giebt es hier nur den einen Fall: die Curve schneidet die q-Axe in zwei Punkten. Diese seien $q = \pm \iota_1$. Das Gebiet der positiven Funktionswerthe möge ε_1 heissen. Unter Grenzen des Gebiets sollen wieder die Nullwerthe verstanden werden.

Das Bewegungsintervall erstreckt sich demnach von $q = + \iota_1$ bis $+ \infty$ und von $q = - \iota_1$ bis $- \infty$. Die Uebertragung der Bewegung auf den Raum ist aus dem Vorhergehenden leicht ersichtlich. Auch hier erhalten wir als Resultat:

Für einen Parallelkreis des Rotationshyperboloids ist

$$F_{-n}(q) > 0, = 0, < 0,$$

je nachdem derselbe in dem Gebiet ε_1, in der Grenze desselben oder ausserhalb dieses Gebiets liegt.

Die genannten Bedingungen für $+n$ bestimmen also die Grenzen, innerhalb deren $F_{+n}(q)$ positiv und von Null verschieden ist, während $f_{+n}(q)$ zwischen und in diesen Grenzen dieselben Eigenschaften besitzt. Unter diesen Bedingungen erhalten wir eine den Gleichungen § 1 (I) entsprechende bedingt periodische Bewegung des materiellen Punktes. Dieselbe findet so statt, dass die Bahncurve abwechselnd die beiden eine Bewegungszone begrenzenden Parallelkreise berührt; diese Kreise heissen alsdann Wendekreise (vergl. A. m. S. 314 § 4). Es können sich aber auch instabile Zweige ergeben, wie es für negative n der Fall ist (A. m. S. 321 IV), oder die Bewegung wird asymptotisch. Instabile Zweige ergeben sich nämlich, wenn die Bewegungszonen auf dem Rotationshyperboloid in dem Intervalle $-\infty < q < +\infty$ nur einseitig begrenzt sind. Die Untersuchung hierüber ist noch nicht abgeschlossen, und es möge genügen, hier auf ein Beispiel zu diesem Falle aufmerksam gemacht zu haben. Die asymptotische Bewegung tritt ein, wenn zwei Wendekreise benachbarter Zonen zusammenfallen.

Im Folgenden, wo nur noch von $F_{+n}(q)$ die Rede sein wird, treten alle diese Fälle wieder auf.

§ 3. Die Zeitperiode und die Curven der Bewegung.

Es ist erforderlich, die § 2 (3) aufgestellten Fälle a) bis d) einzeln zu betrachten.

a) Der materielle Punkt kann sich bewegen zwischen zwei Wendekreisen, deren $q = \pm \lambda_1$ ist. Es giebt nur eine Bewegungszone.

Die Periodicitätsconstante ist

$$\omega_{11} = \int_{-\lambda_1}^{+\lambda_1} \frac{dq}{\sqrt{F_{+n}(q)}}.$$

Bezeichnen wir mit T die Zeit, welche der materielle Punkt gebraucht, um von einem Wendekreise bis zum andern zu gelangen, so gilt

$$T = 2\,\omega_{22}.$$

Es liegt hier die Normalform der stabilen Bewegung vor. q lässt sich demnach darstellen als eine eindeutige, unbedingt periodische Funktion von t mit obiger Periode, desgl. also auch z. Dagegen sind x und y eindeutige, bedingt periodische Funktionen von t, welche die Periode

$$T = 2\,m_2\,\omega_{22}$$

haben unter der Bedingung, dass

$$4\,m_1\,\frac{\pi}{2} + 2\,m_2\,\omega_{12} = 0.$$

Hierin sind m_1 und m_2 zwei beliebige von Null verschiedene Zahlen, während

$$\omega_{12} = \int_{-\lambda_1}^{+\lambda_1} \frac{\omega\,\sqrt{a^2 + q^2\cos^2\beta}}{\sqrt{F_{+n}(q)}}\,dq$$

ist (vergl. A. m. S. 313 u. 314 § 4).

Zur Zeit $t = 0$ möge sich der materielle Punkt in $q = +\lambda_1$ befinden, nach der Zeit $t = t_1$ sei $q = q_1$. Diesen Werth q_1 wird nun der Punkt haben in den Zeiten

$t_2 = 2\,T + t_1$	$\tau_2 = 2\,T - t_1$
$t_3 = 4\,T + t_1$	$\tau_3 = 4\,T - t_1$
⋮	⋮
$t_n = (n-1)\,2\,T + t_1$	$\tau_n = (n-1)\,2\,T - t_1$

Hieraus ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen t und q:

q hat den Maximalwerth $+\lambda_1$ für

$t = 0,\ 2\,T,\ 4\,T,\ \ldots\ldots\ (n-1)\,2\,T,\ \ldots.$

q hat den Minimalwerth $-\lambda_1$ für

$t = T,\ 3\,T,\ 5\,T,\ \ldots\ldots\ (2n-1)\,T,\ \ldots..$

q hat den Werth Null für

$$t = \frac{T}{2},\ \frac{3\,T}{2},\ \frac{5\,T}{2},\ \ldots\ldots\ \frac{(2n-1)\,T}{2},\ \ldots.$$

Dieselbe Schwingungphase wie zu der beliebigen Zeit t_1 hat der Punkt in den Zeiten: t_1, $2\,T_+ t_1$, $4\,T_+ t_1$, ... $(n-1)\,2\,T_+ t_1$, ..., die entgegengesetzte in: $2\,T_- t_1$, $4\,T_- t_1$, ... $(n-1)\,2\,T_- t_1$, ...

Da ferner $\frac{dq}{dt}$ unverändert bleibt, wenn q sich nicht ändert, so muss die Geschwindigkeit jedesmal dieselbe sein, wenn von dem sich bewegenden Punkte derselbe Werth q erreicht wird. Dies ist aber in den angegebenen Zeiten der Fall.

b) Der materielle Punkt kann sich in zwei Gebieten bewegen von $q = +\lambda_2$ bis o und von $q = -\lambda_2$ bis o. Hier liegen zwei nächstfolgende Wendekreise zweier verschiedener bedingt periodischer Zweige (vergl. c), der Bewegung zusammen ($q = o$). Nach A. m. S. 319 IV. muss die Bahnkurve des materiellen Punktes in unendlich vielen Windungen das Rotationshyperboloid umkreisen und sich dem Parallelkreise $q = o$ asymptotisch nähern, wenn der Anfangsort des beweglichen Punktes ausserhalb dieses Kreises gelegen ist. Alsdann existirt keine Zeitperiode, der Punkt erreicht vielmehr diesen Kreis erst nach unendlich langer Zeit. Diese Bewegung findet also auch statt, wenn $\lambda = \pm\lambda_2$ gesetzt wird, wobei der Anfangsort in $q = \pm\lambda_2$ angenommen ist. Lassen wir dagegen den Punkt vom Kreise $q = o$ ausgehen, so schliesst dieser Fall eine derartige Bewegung aus. Der materielle Punkt wird diesen Kreis nicht verlassen, die Bewegung befindet sich im labilen Gleichgewicht. Die Zeit T_1, in welcher der materielle Punkt den Kreis durchläuft, ist dieselbe, wie die, welche gebraucht wird, damit φ von o bis 2π wächst, d. i. $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$.

c) Auch in diesem Falle bewegt sich der materielle Punkt innerhalb zweier aber getrennt liegender Gebiete. Die Grenzen werden bestimmt einerseits durch $q = +\lambda_3$ und $+\lambda_4$, andrerseits durch $q = -\lambda_3$ und $-\lambda_4$. Für beide Zonen der Bewegung gelten die Betrachtungen des Falles a); denn jeder der vorhandenen Zweige hat die vorher erwähnte

Normalform. Die Periodicitätsconstanten sind dieselben wie in a) nur müssen die Grenzen in $\pm \lambda_4$ bis $\pm \lambda_3$ umgewandelt werden. Es bedarf also dieser Fall keiner weiteren Untersuchung.

d) Hier sind zwei Kreise vorhanden, auf denen der materielle Punkt sich bewegen kann. Auf jedem derselben findet die Bewegung mit constanter Geschwindigkeit statt wie in b), aber der Punkt befindet sich jetzt im stabilen Gleichgewicht, da seine Bahn von unerreichbaren Theilen begrenzt wird (vergl. A. m. S. 318 III.). Es ist wieder $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$.

§ 4. Specielle Fälle.

Von besonderem Interesse sind die Fälle, in denen die rotirende Grade eine ausgezeichnete Lage einnimmt. Diese Fälle sind folgende:

1) $a > 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Die Rotationsfläche ist ein Cylinder.

2) $a = 0$, $\beta > 0$. Die Rotationsfläche ist ein Kegel.

3) $a > 0$, $\beta = 0$. Die rotirende Grade bewegt sich in der XY-Ebene im Abstand a vom Centrum.

4) $a = 0$, $\beta = 0$. Die rotirende Grade geht durch das Centrum und durchläuft die XY-Ebene.

5) $a = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Die Bewegungssphäre ist die Z-Axe.

1) $a > 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Die von der rotirenden Graden beschriebene Fläche ist ein grader Cylinder mit dem Grundradius a.

Durch den Uebergang zu $\beta = \frac{\pi}{2}$ ändert sich die Erzeugungscurve der Rotationsfläche (w, q), nämlich

$$w = F_{+n}(q) = -\frac{2\mu}{n+1}(q^2+a^2)^{\frac{n+1}{2}} + c_1.$$

Die Nullwerthe dieser Funktion sind

$$\pm \lambda_1 = \pm \sqrt{\sqrt[\frac{n+1}{2}]{\frac{c_1 (n+1)}{2\mu}} - a^2}.$$

Die Bedingung der Reellität von λ_1 ist

$$c_1 \geqq \frac{2\mu}{n+1} a^{n+1}.$$

Die Constante c_1 bestimmt sich aus der Anfangslage des materiellen Punktes. Es sei zur Zeit $t = o$, wie früher, $v = o$ und $q = \pm \lambda_1$. Dann folgt

$$c_1 = \frac{2\mu}{n+1} (\lambda_1^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}},$$

eine Grösse, die in der That positiv und grösser als $\frac{2\mu}{n+1} a^{n+1}$ oder mindestens gleich diesem Ausdruck ist.

Da nun für die Funktion $F_{+n}(q)$ nur ein Maximum, $q = o$, besteht, während sie für $q = \pm \infty$ negativ unendlich wird, so ist die Gestalt der Curve Taf. III, Fig. III, so lange $c_1 > \frac{2\mu}{n+1} a^{n+1}$. Es ergiebt sich daher auf dem Cylinder eine oscillirende Bewegung zwischen den beiden Wendekreisen, die nach beiden Seiten der XY-Ebene in der Entfernung λ_1 von ihr liegen.

Ist aber $c_1 = \frac{2\mu}{n+1} a^{n+1}$, so berührt die Rotationsfläche (w, q) den Cylinder im Endpunkte von a. Die Bahn des Punktes ist also ein Kreis, und die Bewegung ist im stabilen Gleichgewicht.

2) $a = o$, $\beta > o$. Der materielle Punkt bewegt sich auf einem Doppelkegel.

Durch die wiederholt angewendete Methode der Aufsuchung der Maxima und Minima oder durch Specialisirung der betreffenden Gleichungen aus § 2 erhalten wir hier für $q = o$ ein Minimum. Der Maximalwerth tritt ein für

$q = \pm \sqrt[n-1]{\frac{\omega^2 \cos^2 \beta}{\mu}}$. Dieser letztere Werth kann die beiden Vorzeichen nur behalten, wenn n ungrade ist, im andern Falle gilt nur das positive Zeichen. Wir unterscheiden daher zwei Unterfälle.

Im ersten Unterfalle haben wir ein Minimum $q = o$ und zwei Maxima $q = \pm \nu$; im andern ein Minimum $q = o$ und ein Maximum $q = + \nu$. Die Bedingungen für die § 2 (3) aufgestellten Fälle sind nun:

a) $c_1 > o$,

b) $c_1 = o$,

c) $o > c_1 > \frac{2\mu}{n+1} \nu^{n+1} - \nu^2 \omega^2 \cos^2 \beta$,

d) $c_1 = \frac{2\mu}{n+1} \nu^{n+1} - \nu^2 \omega^2 \cos^2 \beta$.

Fall a).

Erster Unterfall. Der materielle Punkt bewegt sich oscillirend zwischen 2 Wendekreisen ($q = \pm \lambda_1$). Bei jedem Hin- und Hergang aber durchläuft er das Centrum mit einer Geschwindigkeit $v = \lambda_1 \sqrt{\omega^2 \cos^2 \beta - \frac{2\mu}{n+1} \lambda_1^{n-1}}$.

Zweiter Unterfall. Die Bewegung ist eine instabile, indem der Punkt in dem Intervalle von $+ \lambda_1$ bis $- \infty$ sich bewegen kann. Jedesfalls geht die Bahn durch das Centrum und bildet auf dem Kegel der positiven q-Axe eine Schleife, während die beiden Zweige auf dem andern Kegel in Spirallinien nach $- \infty$ verlaufen.

Fall b).

Erster Unterfall. Die Bewegungsintervalle sind hier benachbart, sie reichen von $+ \lambda_2$ bis o und von $- \lambda_2$ bis o. Wir haben daher eine Bewegung zu erwarten, die § 3b) entspricht. Die Curven nähern sich von den äusseren, die Zonen begrenzenden, Kreisen asymptotisch dem Centrum. Wird dagegen der Punkt in das Centrum gelegt, so bleibt er in Ruhe, jedoch befindet er sich im labilen Zustande.

Zweiter Unterfall. Von den beiden Bewegungszonen gleicht die eine einer solchen des ersten Unterfalles, während die andere von $q = o$ bis $q = -\infty$ reicht. Dementsprechend sind die Bewegungserscheinungen in der ersten Zone wie eben erwähnt, in der andern dagegen wieder instabiler Natur.

Fall c).

Erster Unterfall. Es giebt zwei symmetrisch gelegene Bewegungszonen zu beiden Seiten des Centrums. Die Bewegung in beiden ist oscillirend.

Zweiter Unterfall. Die erste Bewegungszone ist den ebengenannten entsprechend, die andere enthält wieder instabile Zweige der Bahn.

Fall d).

Erster Unterfall. Die Bahnen sind zwei Kreise, welche gleichweit vom Centrum entfernt liegen.

Zweiter Unterfall. Die eine Bahn ist ein Kreis, welcher nach der Seite der positiven q liegt; die andere ein instabiler Zweig ganz ähnlich dem im Fall c).

3) $a > o$, $\beta = o$. Der materielle Punkt bewegt sich in der Ebene der XY mit Ausschluss des Kreises, welcher mit dem Radius a um das Centrum beschrieben wird.

Die Curve $w = F_{+n}(q)$ hat für $q = o$ ein Minimum und für $q = \pm \sqrt{\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\frac{\omega^2}{\mu}} - a^2} = \pm \nu$ zwei Maxima. Wir erhalten daher durch Specialisirung aus § 2 (3) die vier Fälle:

a) c_1 positiv und $> \frac{2\mu}{n+1} a^{n+1}$,

b) c_1 positiv und $= \frac{2\mu}{n+1} a^{n+1}$,

c) $\frac{2\mu}{n+1} a^{n+1} > c_1 > \frac{2\mu}{n+1} (\nu^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} - \nu^2 \omega^2$,

d) $c_1 = \frac{2\mu}{n+1} (\nu^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}} - \nu^2 \omega^2$.

Fall a). Die Bewegung des materiellen Punktes findet zwischen zwei concentrischen Kreisen mit den Radien $\sqrt{\lambda_1^2 + a^2}$ und a statt. Beginnt die Bewegung zur Zeit $t = o$, so befindet sich der Punkt in $q = + \lambda_1$. Nach der Zeit $t = \frac{T}{2}$ ist der Punkt auf dem innern Wendekreise angekommen. Es ist deutlich ersichtlich, dass hier eine Berührung stattfindet, da der Punkt sich längs der Tangente bewegt. Nach $t = T$ ist der Punkt in $q = - \lambda_1$ angekommen. Während also q von $+ \lambda_1$ bis $- \lambda_1$ fällt, wird eine Bahn beschrieben, welche, auf dem äusseren Kreise beginnend, nach dem innern verläuft, diesen berührt und wieder nach dem äusseren zurückkehrt. Bei der Berührung des innern Kreises läuft der Punkt entgegengesetzt der Bewegung des relativen Anfangspunktes; daher stellt hier die Bahn eine Schleife dar, wie in Fig. IV, Taf. III ersichtlich ist. Wie weit die Punkte $\wp$ und $\wp_1$ auseinanderliegen hängt im allgemeinen von ω ab.

Der zweite Theil der Curve wird erzeugt, wenn der Punkt von $q = - \lambda_1$ nach $q = + \lambda_1$ sich bewegt, d. i. während der Zeit $t = T$ bis $t = 2\,T$. Für $t = \frac{3\,T}{2}$ findet wieder Berührung des innern Kreises statt. Der materielle Punkt läuft jetzt aber mit dem relativen Anfangspunkte in gleicher Richtung. Die Berührung ist daher im umgekehrten Sinne der ersten, so dass ein Durchschneiden der Bahn hier nicht stattfindet.

Diese beiden Theile der Bahn wiederholen sich fortgesetzt.

Fall b). Die beiden hier durchlaufenen Zonen fallen vollständig aufeinander und zwischen die concentrischen Kreise mit den Radien $q = o$ und $q = \lambda_2$. Die Bewegungszweige jedoch sind in beiden verschieden und nicht etwa symmetrisch zu einander. Denn wäre das Letztere der Fall, so müssten für symmetrisch gelegene Werthe von q die geometrisch dargestellten Geschwindigkeiten ebenfalls symme-

trisch liegen, was keineswegs der Fall ist. Beginnt nämlich der Punkt auf dem äusseren Kreise ($q = + \lambda_2$) seine Bewegung, so geht er in Spirallinie um den innern ($q = o$) mit der Bahngeschwindigkeit

$$v^2 = (q^2 + a^2)\,\omega^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + 2\,a\,\omega\,\frac{dq}{dt}.$$

Ist die Anfangslage $q = - \lambda_2$, so läuft er in demselben Sinne um den innern Kreis, aber jetzt mit der Bahngeschwindigkeit

$$v^2 = (q^2 + a^2)\,\omega^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - 2\,a\,\omega\,\frac{dq}{dt}.$$

Beide Bahnen haben das Aussehen der Fig. V, Taf. III.

Fall c). Befindet sich der Punkt zwischen $q = \lambda_3$ und $q = \lambda_4$, so liegt seine Bahn zwischen zwei concentrischen Kreisen um das anziehende Centrum. Der Radius des kleineren ist $\sqrt{a^2 + \lambda_4^2}$, der des grösseren $\sqrt{a^2 + \lambda_3^2}$. Die Bahn ist eine zwischen jenen Wendekreisen liegende im allgemeinen schiefe Schlangenlinie. Auch das Bewegungsgebiet für $q = - \lambda_3$ und $q = - \lambda_4$ fällt zwischen dieselben Kreise, doch sind auch hier die Bahnen von verschiedener Gestalt, was aus den verschiedenen Geschwindigkeiten in den entsprechenden Bahnelementen hervorgeht. Läuft der Punkt von λ_3 nach λ_4, so ist seine Geschwindigkeit

$$v^2 = (q^2 + a^2)\,\omega^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + 2\,\omega\,a\,\frac{dq}{dt},$$

bewegt er sich dagegen von $- \lambda_3$ nach $- \lambda_4$, so hat er die Geschwindigkeit

$$v^2 = (q^2 + a^2)\,\omega^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - 2\,\omega\,a\,\frac{dq}{dt}.$$

Diese Geschwindigkeitswerthe vertauschen sich bei der rückläufigen Bewegung von λ_4 nach λ_3 und von $- \lambda_4$ nach $- \lambda_3$.

Vergleicht man nun zwei Punkte gleicher Geschwindigkeit, so liegen dieselben symmetrisch und befinden sich in entgegengesetzter Bewegungsphase. Ihre Geschwindigkeitscomponenten bilden Winkel, welche sich zu zwei Rechten ergänzen. Die Geschwindigkeitsresultanten, welche in den

Bahntangenten dieser Punkte liegen, bilden mit den beiden symmetrisch gelegenen Leitstrahlen r — in demselben Sinne genommen — Winkel, die sich ebenfalls zu zwei Rechten ergänzen, oder — im entgegengesetzten Sinne — gleiche Winkel. Das heisst: jeder vom äusseren Kreise ($q = \lambda_3$) nach dem innern Kreise ($q = \lambda_4$) absteigende Zweig ist nach seiner Gestalt symmetrisch einem von dem innern ($q = -\lambda_4$) nach dem äusseren Kreise ($q = -\lambda_3$) aufsteigenden Zweige und umgekehrt. Taf. IV, Fig. VI.

Fall d). Die Bahnen ($q = \pm \nu$), zwei Kreise, fallen in eine einzige zusammen. Diese ist der Kreis mit dem Radius $\sqrt[n-1]{\frac{\omega^2}{\mu}}$. Der Punkt bewegt sich folglich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $\omega \sqrt[n-1]{\frac{\omega^2}{\mu}}$.

4) $a = 0$, $\beta = 0$. Der materielle Punkt kann sich in der ganzen Ebene um das Centrum herum bewegen.

Weil $a = 0$, so erhalten wir, wie in 2), zwei Unterfälle. Erstens giebt es für ungrade n ein Minimum, $q = 0$, und zwei Maxima, $q = \pm \sqrt[n-1]{\frac{\omega^2}{\mu}} = \pm \nu$, für die Funktion $w = F_{+n}(q)$; zweitens haben wir für grade n ein Minimum, $q = 0$, und ein Maximum, $q = +\nu$. Die § 2 (3) genannten Bedingungen heissen jetzt:

a) $c_1 > 0$,

b) $c_1 = 0$,

c) $0 > c_1 > \frac{2\mu}{n+1} \nu^{n+1} - \nu^2 \omega^2$,

d) $c_1 = \frac{2\mu}{n+1} \nu^{n+1} - \nu^2 \omega^2$.

Fall a).

Erster Unterfall. Der materielle Punkt bewegt sich innerhalb eines Kreises, mit dem Radius λ_1 um das Centrum beschrieben. Auf diesem Kreise befindet sich der Punkt zu

den Zeiten o, T, 2 T, ... n T, ... Die Bahn desselben berührt den Grenzkreis und geht nach der Zeit T jedesmal durch das Centrum mit der Geschwindigkeit

$$v = \lambda_1 \sqrt{\frac{2\mu}{n+1} \lambda_1^{n-1} - \omega^2}.$$

Wir erhalten daher eine Bahn, welche aus lauter Schleifen zusammengesetzt ist, die sämmtlich ihre Spitzen im Centrum haben. Taf. IV, Fig. VII.

Zweiter Unterfall. Der Punkt kann sich von $q = +\lambda_1$ bis $-\infty$ bewegen; wir haben daher hier den Fall einer instabilen Bewegung. Die Zweige der Bahn werden Spirallinien sein, welche innerhalb des Kreises mit dem Radius $q = \lambda_1$ in einander übergehen, indem hier beide durch eine Schleife verbunden sind. Taf. IV, Fig. VIII.

Fall b).

Erster Unterfall. Der materielle Punkt bewegt sich um das Centrum innerhalb eines Kreises, welcher den Radius λ_2 hat. Die Curven sind Spirallinien, vom Grenzkreis ausgehend und sich dem Centrum als Pol asymptotisch nähernd.

Zweiter Unterfall. Die Bahn ist einmal eine solche eben beschriebene Spirale und dann noch ein instabiler Zweig, der als Spirale um das Centrum herumläuft und ins Unendliche sich ausdehnt.

Fall c).

Erster Unterfall. Die beiden Bewegungsgebiete bedecken sich und liegen zwischen den Kreisen $q = \lambda_3$ und $q = \lambda_4$. Die Bahnen stimmen auch in der Gestalt vollständig überein, da für beide dieselben Bedingungen bestehen. Die Bahn selbst ist eine Schlangenlinie zwischen den beiden Kreisen.

Zweiter Unterfall. Der eine Zweig der Bahn entspricht der eben dargestellten Curve des ersten Unterfalles, der andere ist ein instabiler Zweig, der als Spirale um den Kreis mit dem Radius $q = \lambda_4$ herumläuft und im Unendlichen sich verliert.

Fall d).

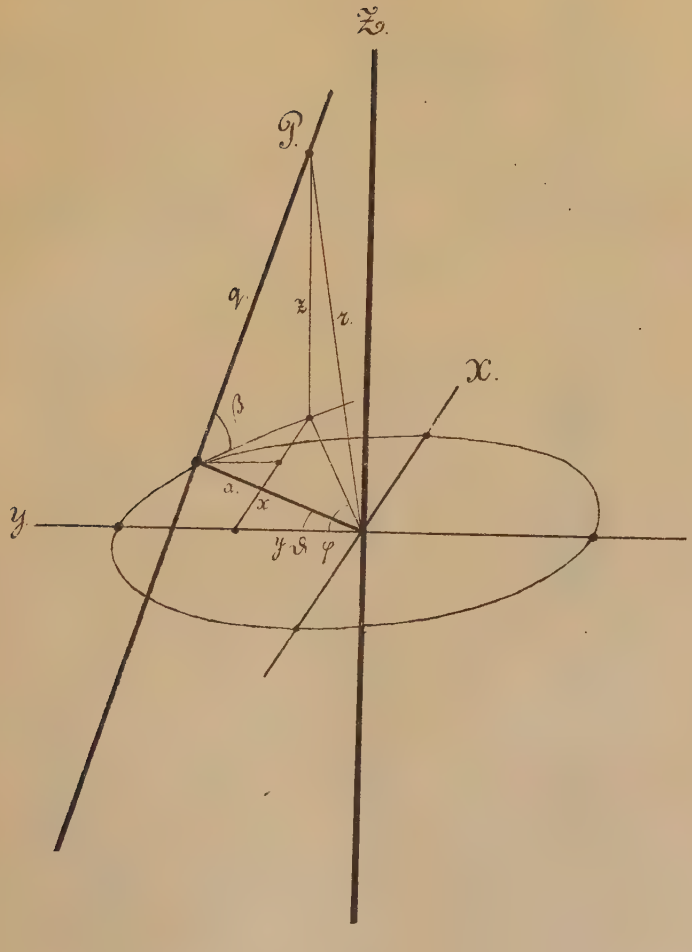
Erster Unterfall. Die Bahnlinie ist ein Kreis wie in 3) Fall d).

Zweiter Unterfall. Ausser einem solchen Kreise ist noch ein instabiler Zweig vorhanden, ähnlich wie im Fall c).

5) $a = o$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Das mögliche Bewegungsgebiet des Punktes ist die Z-Axe. Es wird $w = -\frac{2\mu}{n+1} q^{n+1} + c_1$. Da in jedem Falle $w = o$ ist, so folgt aus $q = o$ auch $c_1 = o$. Die Bahn reducirt sich auf einen einzigen Punkt, nämlich das Centrum selbst.

Druck von E. Baensch jun. in Magdeburg.

Taf. I.



Taf. II.

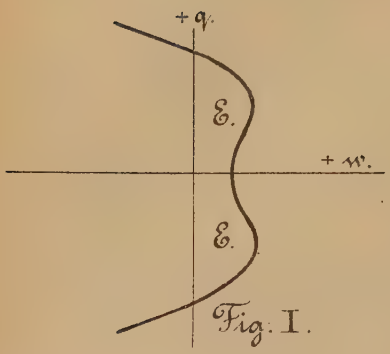


Fig. I.

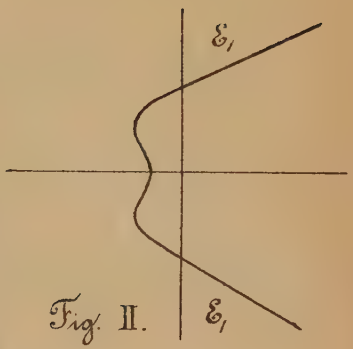
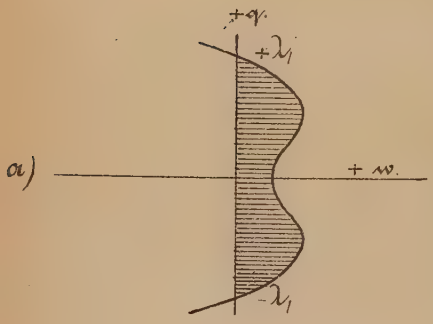
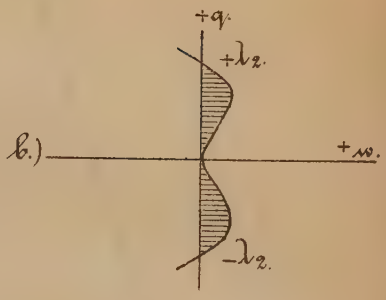
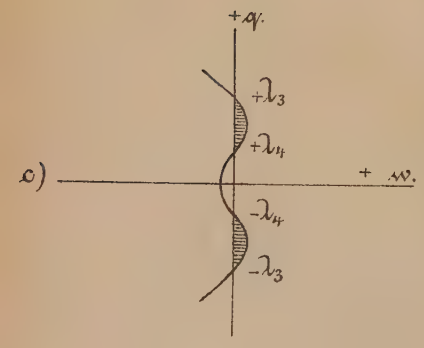
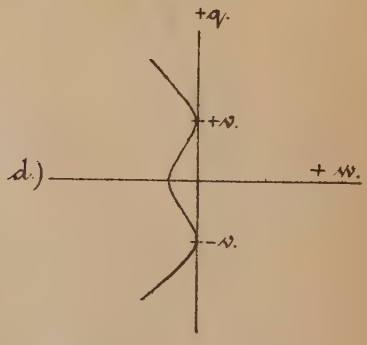


Fig. II.









Taf. III.

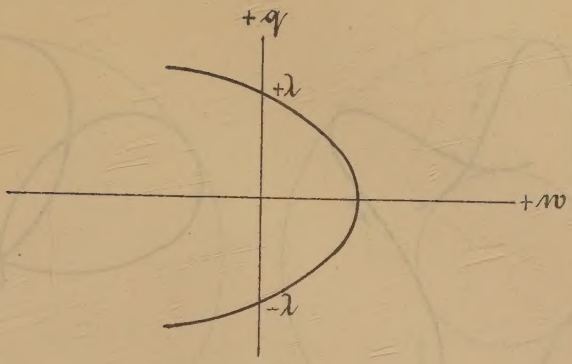


Fig. III.

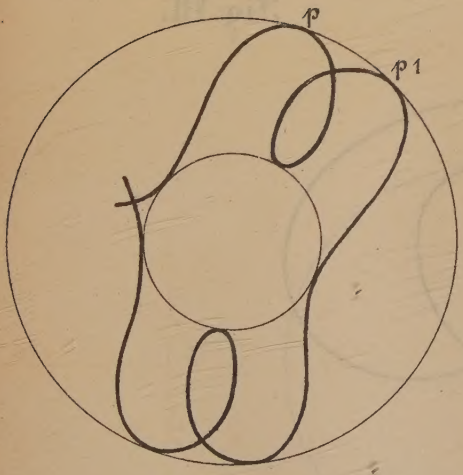


Fig. IV.

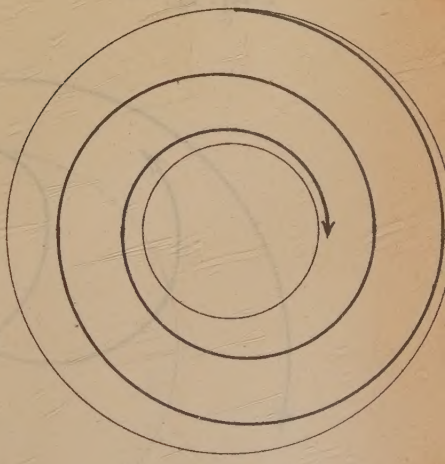


Fig. V.

Taf. IV.

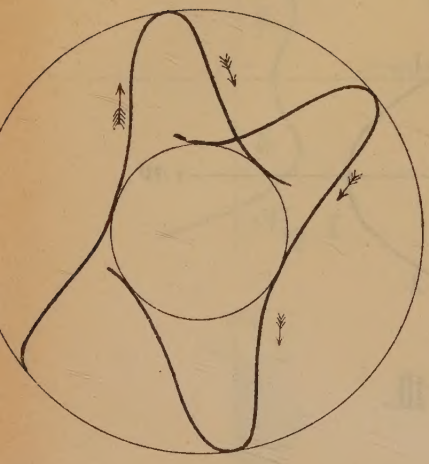


Fig. VI.

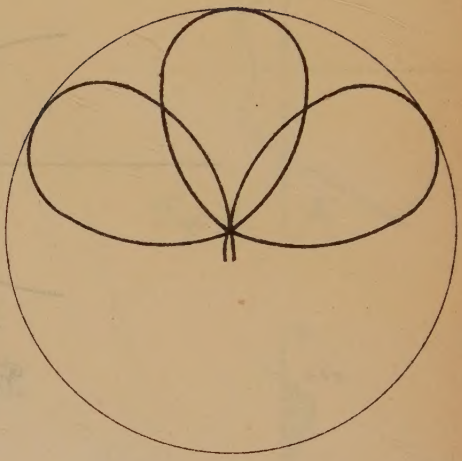


Fig. VII.

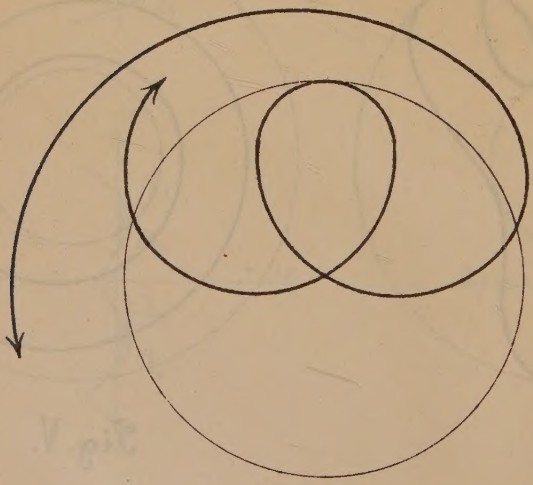


Fig. VIII.